УДК 514.182.7 DOI: 10.37279/2413-1873-2021-20-53-58

# МОДЕЛИРОВАНИЕ АРХИТЕКТУРНОЙ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗАВИСИМЫХ СЕЧЕНИЙ

Чекалин А.А., Решетников М.К., Шпилев В.В., Бородулина С.В., Рязанов С.А.

ФГБОУВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», г.Саратов, ул.Политехническая, 77 e-mail: reshmk@rambler.ru, chekaliny@mail.ru, vasya-shpilev@rambler.ru

Аннотация. Для конструирования поверхностей в архитектуре, как правило, применяются универсальные методики, разработанные для других технических отраслей. В первую очередь это кинематические поверхности общего вида и интерполяционные кубические сплайны для моделирования сложных кусочно-гладких поверхностей. Авторы предлагают для задач геометрического моделирования архитектурных форм разрабатываемые использовать ингеродифференциальный сплайн четвертой степени. Для расчетов и построений на компьютере предлагаемый сплайн ненамного сложнее традиционных кубических сплайнов, так как имеет один дополнительный параметр – коэффициент. Однако это позволяет при конструировании локально управлять формой кривой или поверхности, то есть, изменять форму на отдельных участках, не затрагивая остальные участки. В статье предлагается методика построения геометрической модели кинематической поверхности зависимых сечений с параболой четвертой степени в качестве образующей. Если в качестве направляющей используются кубические сплайны, поверхность представляет собой неоднородный (гетерогенный) сплайн степени 3×4. В статье показывается, что поверхность на основе предложенного математического аппарата может быть составной кусочно-гладкой. Частный случай конструирования поверхности рассматривается на примере создания модели поверхности фасада жилого дома по существующему концепту. Алгоритм можно легко запрограммировать и добавить в качестве инструмента в существующие системы автоматизированного проектирования. Ключевые слова. Геометрическая модель поверхности, сплайн, парабола, поверхность, кривая.

# **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время ускоренное развитие строительной отрасли обозначило интерес к нетрадиционным решениям архитектурных задач в области геометрии. Долгое время советское градостроительство решало наиболее важные задачи урбанистики, такие как скорейшее возведение доступного жилья, развитие инфраструктуры и т.д. Сегодня крупный и средний бизнес формирует запрос на более сложные архитектурные формы, чем традиционные промышленные и жилые здания. В крупных городах спортивные сооружения, деловые, торговые, развлекательные центры строятся c учетом требований эстетических (привлекательность, узнаваемость и т.п.), наряду с функциональными характеристиками.

Решение вопросов конструирования поверхностей является одной из основных задач инженерной геометрии [1-3]. В некоторых отраслях техники форма поверхностей изделий является традиционно сложной. Это в первую очередь авиа-, судо- и автомобилестроение, легкая и обувная промышленность. Здесь разработаны и продолжают

развиваться методы конструирования поверхностей с учетом требованиям к изделиям именно в эти отраслях [4-7]. Архитектурное проектирование использует относительно небольшой набор общих методов конструирования криволинейных поверхностей, которые реализованы компьютерных программах [8-10]. Предлагается геометрического моделирования архитектурных форм использовать каркаснокинематическую поверхность основе на интегродифференциальной параболы четвертого порядка [11].

### **МЕТОДЫ**

Для конструирования сложных составных кусочно-гладких кривых линий наибольшее распространение получили кривые третьего порядка - кубические сплайны и кривые Безье. Дуга такой кривой, так или иначе, задается двумя конечными точками и касательными в этих точках и не имеет других параметров для локального изменения формы, кроме этих касательных. Однако такая конструкция наилучшим образом подходит для моделирования составных кусочно-гладких кривых - обводов [12].

Скалярная сплайн-функция на области определения  $[x_1,x_2]$  параметра х определяется формулой

$$y = S_3(x) = y_1 \varphi_1(u) + y_2 \varphi_2(u) + (m_1 \varphi_3(u) + m_2 \varphi_4(u))h,$$
 (1)

где  $y_1$  и  $y_2$  — значения сплайн-функции на концах дуги,  $m_1$  и  $m_2$  — значения производных:

 $m_1 = \frac{dS(x_1)}{dx}$ ,  $m_2 = \frac{dS(x_2)}{dx}$ ,  $h = x_2 - x_1$ ,  $\varphi$  - весовые функции третьего порядка:  $\varphi_1 = 1 - 3u^2 + 2u^3$ ,

$$\varphi_2 = 3u^2 - 2u^3$$
,  $\varphi_3 = u - 2u^2 + u^3$ ,  $\varphi_4 = -u^2 + u^2$ ,  $u = \frac{x_2 - x_1}{h}$  (Puc.1.).

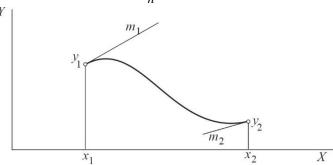


Рис. 1. Кубическая парабола.

Fig.. 1. Cubic parabola.

Интегродифференциальная параболическая функция четвертого порядка имеет дополнительный параметр. Парабола задается формулой

$$y = S_4(x) = y_1 \psi_1(u) + y_2 \psi_2(u) + (m_1 \psi_3(u) + m_2 \psi_4(u))h + I_1^2 \psi_5(u) / h,$$
(2)

где  $\psi$  - весовые функции четвертого порядка:  $\psi_1 = (1+5u)(1-3u)(1-u)^2$ ,  $\psi_2 = (3u-2)(6-5u)u^2$ ,  $\psi_3 = u(2-5u)(1-u)^2/2$ ,  $\psi_4 = (1-u)(3-5u)u^2/2$ ,  $\psi_5 = 30u^2(1-u)^2$ .

Функция (2) описывает кривую, имеющую в общем случае две точки перегиба, а в частных случаях - одну или вообще не имеет таковых (рис. 2а). Первые четыре коэффициента имеют тот же смысл, что и для кубической параболы (1). Геометрический смысл пятого параметра  $I_1^2$  - площадь координатной плоскости под графиком функции.

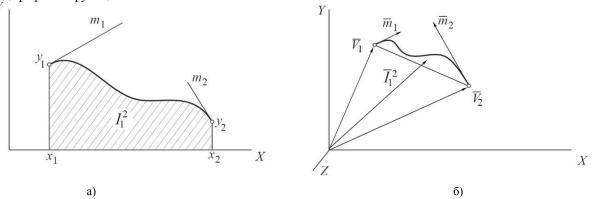


Рис. 2. Парабола четвертой степени.

Fig. 2. Parabola of the fourth degree.

В векторной форме дуга параболы четвертого порядка задается пятью векторами: радиус-векторы концов дуги, касательные векторы на концах дуги и вектором-интегралом, позволяющим изменять форму кривой (Рис. 2б)

$$\overline{V}_{4}(t) = \overline{V}_{1}\psi_{1}(u) + \overline{V}_{2}\psi_{2}(u) + (\overline{m}_{1}\psi_{3}(u) + \overline{m}_{2}\psi_{4}(u))h + \overline{I}_{1}^{2}\psi_{5}(u)/h , \qquad (3)$$

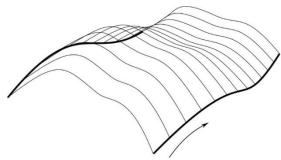
Вектор-интеграл  $\overline{I}_{1}^{2}$  указывает на центр массы площади, стянутой дугой параболы.

Напомним, что векторная функция в трехмерном пространстве представляет собой вектор, имеющий компонентами три скалярные функции от одного параметра

$$\overline{V}(t) = V_{r} \cdot \overline{i} + V_{v} \cdot \overline{j} + V_{z} \cdot \overline{k}$$

где  $\overline{i}$ ,  $\overline{j}$  и  $\overline{k}$  – тройка базисных векторов.

Кинематическая поверхность образуется перемещением кривой постоянной или переменной формы по какому либо закону, например вдоль одной или нескольких линий. Подвижная линия называется образующей, линии, задающие закон перемещения – направляющими (Рис. 3).



**Рис. 3.** Кинематическая поверхность с двумя направляющими. **Fig. 3.** Kinematic surface with two guides.

Рассмотрим алгоритм конструирования кинематической поверхности с кривой четвертого порядка в качестве образующей.

Зададим две a и b направляющие для концов дуги образующей, например кубическими параболами.

$$\begin{split} & \overline{V}_{a}(v) = \overline{V}_{1}^{a} \varphi_{1}(v) + \overline{V}_{2}^{a} \varphi_{2}(v) + (\overline{m}_{1}^{a} \varphi_{3}(v) + \overline{m}_{2}^{a} \varphi_{4}(v)) s \text{ M} \\ & \overline{V}_{b}(v) = \overline{V}_{1}^{b} \varphi_{1}(v) + \overline{V}_{2}^{b} \varphi_{2}(v) + (\overline{m}_{1}^{b} \varphi_{3}(v) + \overline{m}_{2}^{b} \varphi_{4}(v)) s , \end{split}$$
 (5)

где s зависит от параметризации. Рекомендуется считать  $s = |V_2 - V_1|$ 

Функции (5) зависят от одного параметра  $v \in [0,1]$ , поэтому между точками кривых имеется взаимнооднозначное соответствие. Кривые удобно изображать в виде графиков скалярных функций, являющихся компонентами векторов (5) (Рис. 3). При реализации данного алгоритма в системах автоматизированного проектирования проектировщик может добиваться необходимой ему формы направляющих оперируя этими скалярными функциями в интерактивном режиме наблюдая за результатами.

Таким же образом зададим направляющие для касательных векторов  $m_a$  и  $m_b$ .

$$\overline{V}_{ma}(v) = \overline{V}_{1}^{ma} \varphi_{1}(v) + \overline{V}_{2}^{ma} \varphi_{2}(v) + (\overline{m}_{1}^{ma} \varphi_{3}(v) + \overline{m}_{2}^{ma} \varphi_{4}(v))s ,$$

$$\overline{V}_{mb}(v) = \overline{V}_{1}^{mb} \varphi_{1}(v) + \overline{V}_{2}^{mb} \varphi_{2}(v) + (\overline{m}_{1}^{mb} \varphi_{3}(v) + \overline{m}_{2}^{mb} \varphi_{4}(v))s$$
(6)

Зададим пятую направляющую для радиус-вектора  $I_a^b$ .

$$\overline{V}_{I}(v) = \overline{V}_{1}^{I} \varphi_{1}(v) + \overline{V}_{2}^{I} \varphi_{2}(v) + (\overline{m}_{1}^{I} \varphi_{3}(v) + \overline{m}_{2}^{I} \varphi_{4}(v))s$$
(7)

Изменяя форму направляющих  $\bar{V}_{ma}(v)$ ,  $\bar{V}_{mu}(v)$  и  $\bar{V}_{I}(v)$  проектировщик добивается нужной формы поверхности в пределах возможностей рассматриваемого инструмента.

Формула кинематической поверхности зависимых неплоских сечений окончательно имеет вид

$$\overline{W}(u,v) = \psi(u)\overline{G}\varphi^{T}(v)$$
, где (8)

$$\begin{split} \overline{G} = \begin{pmatrix} \overline{V_1}^a & \overline{V_2}^a & \overline{m_1}^a & \overline{m_2}^a \\ \overline{V_1}^b & \overline{V_2}^b & \overline{m_1}^b & \overline{m_2}^b \\ \overline{V_1}^{ma} & \overline{V_2}^{ma} & \overline{m_1}^{ma} & \overline{m_2}^{ma} \\ \overline{V_1}^{mb} & \overline{V_2}^{mb} & \overline{m_1}^{mb} & \overline{m_2}^{mb} \\ \overline{I_1}^{ab} & \overline{I_2}^{ab} & \overline{m_1}^{m} & \overline{m_2}^{m} \end{pmatrix}, & \psi(u) = \left(\psi_1(u)\,\psi_2(u)\,\psi_3(u)\,\psi_4(u)\,\psi_5\right), & \varphi(v) = \left(\varphi_1(v)\,\varphi_2(v)\,\varphi_3(v)\,\varphi_4(v)\right). \end{split}$$

Поверхность (8) является двумерным неоднородным сплайном степени  $3\times4$ . Неоднородным мы его называем в том смысле, что в при фиксированном параметре и он представляет собой кубический сплайн, а при фиксировании v интегродифференциальный сплайн четвертой Благодаря этому направляющие и степени. образующая могут быть составными сплайновыми кривыми, то есть иметь более сложную форму.

#### **РЕЗУЛЬТАТЫ**

Рассмотрим пример конструирования поверхности. На рис. 4 жилой дом в Нью Дели с необычными для спального района архитектурой и концептом. Проект разработан канадской архитектурной студией Infact Studio. Необычный фасад, основанный на концепции гибкого бетона, хорошо подходит для жаркого тропического и

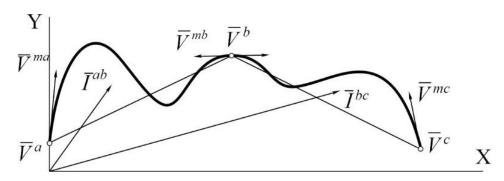
экваториального климата, так как создает глубокие тени и не пропускает прямой солнечный свет вовнутрь помещения.



**Рис. 4.** Концепт криволинейного фасада **Fig. 4.** The concept of a curved facade

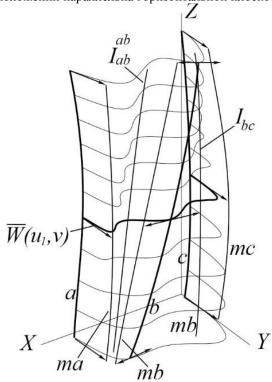
Горизонтальное сечение теоретической поверхности фасада – плоская кривая с четырьмя точками перегиба. Поэтому образующая поверхности будет составлена из двух звеньев интегродифференциального сплайна (3), стыкованных по первому порядку гладкости.

На рис. 5 показано промежуточное горизонтальное сечение  $\overline{W}(u_l, v)$  поверхности при фиксированном u на высоте z=l



**Рис. 5.** Горизонтальное сечение – образующая поверхности. **Fig. 5.** Horizontal section - generatrix of the surface.

Для модели поверхности потребуется задать 8 направляющих: a, b и c – направляющие для опорных точек, ma, mb и mc – направляющие для касательных векторов,  $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$  направляющие для интеграл-вектров. Образующая в каждом своем положении параллельна горизонтальной плоскости (Рис. 6).

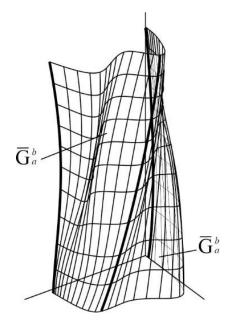


**Рис. 6.** Модель поверхности зависимых сечений. **Fig. 6.** Model of the surface of dependent sections.

Таким образом, строим поверхность фасада как две гладко состыкованные по линии b поверхности зависимых плоских сечений

$$\vec{G}_{a}^{b} \cup \vec{G}_{b}^{c} = \begin{pmatrix} \vec{V}_{1}^{a} & \vec{V}_{2}^{a} & \vec{m}_{1}^{a} & \vec{m}_{2}^{a} \\ \vec{V}_{1}^{b} & \vec{V}_{2}^{b} & \vec{m}_{1}^{b} & \vec{m}_{2}^{b} \\ \vec{V}_{1}^{ma} & \vec{V}_{2}^{ma} & \vec{m}_{1}^{ma} & \vec{m}_{2}^{ma} \\ \vec{V}_{1}^{mb} & \vec{V}_{2}^{mb} & \vec{m}_{1}^{mb} & \vec{m}_{2}^{mb} \\ \vec{I}_{1}^{ab} & \vec{I}_{2}^{ab} & \vec{m}_{1}^{lab} & \vec{m}_{2}^{lab} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \vec{V}_{1}^{b} & \vec{V}_{2}^{b} & \vec{m}_{1}^{b} & \vec{m}_{2}^{b} \\ \vec{V}_{1}^{c} & \vec{V}_{2}^{c} & \vec{m}_{1}^{c} & \vec{m}_{2}^{c} \\ \vec{V}_{1}^{mb} & \vec{V}_{2}^{mb} & \vec{m}_{1}^{mb} & \vec{m}_{2}^{mb} \\ \vec{V}_{1}^{mc} & \vec{V}_{2}^{mc} & \vec{m}_{1}^{mc} & \vec{m}_{2}^{mc} \\ \vec{I}_{1}^{bc} & \vec{I}_{2}^{bc} & \vec{m}_{1}^{lbc} & \vec{m}_{2}^{lbc} \end{pmatrix}$$

Окончательная модель поверхности показана на рис. 7.



**Рис.** 7. Комплексная поверхность. **Fig. 7.** Complex surface.

- В приведенном примере в качестве направляющих выбраны дуги кубических парабол. Однако это могут быть любые кривые, на усмотрение архитектора. Система автоматизированного проектирования может быть построена так, что бы предоставлять широкий выбор кривых для этой цели, в том числе составных.
- В данном конкретном случае модель поверхности может быть упрощена и принять частный вид:
- векторные функции направляющих имеют по две компоненты и зависят от параметра z, который заменяет параметр v в (8);
- векторная функция образующей имеет две компоненты

$$\overline{V}(t) = V_{x} \cdot \overline{i} + V_{y} \cdot \overline{j}$$
.

### выводы

Представленная конструирования метолика поверхности представляет собой гибкий универсальный аппарат для геометрического моделирования кинематических поверхностей и применения в проектировании архитектурных объектов. Направляющими для рассмотренной поверхности может так же служить сплайн четвертой степени. Тогда поверхность становится сплайном степени 4×4. Алгоритм построения модели может быть легко запрограммирован и добавлен в качестве инструмента в программы САПР.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей (Математическое моделирование на основе нелинейных преобразований) [Текст] / Г.С. Иванов. М.: Машиностроение, 1987.- 192 с.
- 2. Короткий В.А. Компьютерное моделирование кинематических поверхностей

- [Текст] /В,А, Короткий, Е.А. Усманова, Л,И, Храмова // Геометрия и графика. -2016. Т,3, №4. С. 19-26. DOI: 10.12737/17347.
- 3. Гирн А.Г. Критерии выбора способа конструирования обвода. [Текст]/ В кн.: Автоматизация технологической подготовки производства на базе систем автоматизации пректирвания. Омск, 1980, с. 97-101.
- 4. Осипов В.А., Лелюшенко С.И., Чистяков Ф.К. Аналитическое описание аэродинамических поверхностей методом специального контура 3 кн.: Машинное проектирование, увязка и воспроизведение сложных деталей в авиастроении. Иркутск, 1976, с 68-70.
- 5. Осипов В.А. САПР и инженерногеометрические задачи авиационной техники. Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техника, 1980, № 2, с. 119-122.
- 6. Рейнов М.Н. Математическая модель судовой поверхности. -Л.: Судостроение, 1977. 32 с.
- 7. Кривошапенко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей [Текст]/ С.Н. Кривошапенко, В.Н. Иванов. М.: Либроком, 2010.  $560\ c$ .
- 8. Кривошапко С.Н. Построение, расчет и возможность применения торсовых оболочек в тонкостенных конструкциях // Расчет оболочек строительных конструкций. М.: изд. УДН, 1982. С. 54-66
- 9. Авдотьин Л.Н. Математика и электронновычислительная техника в решении прикладных градостроительных задач. М.: ЦНТИ госгражданстроя, 1966.
- 10. Дергунов В.И., Жилина Н.Д., Попов Е.В. Основы компьютерных технологий в проектировании. Н.Новгород: Изд-во ННГАСУ,  $2003.-157~\rm c.$
- 11. Чекалин А.А. Моделирование кусочногладкой поверхности двумерным сплайном

различных степеней [Текст] / А.А. Чекалин, М.К. Решетников, Ю.А. Зайцев // Научно-методические проблемы графической подготовки в техническом вузе на современном этапе: материалы науч.-метод. конф. посвящ. 80-летию АГТУ, г. Астрахань, 15-17 сент. 2010 г. / АГТУ. - Астрахань, 2010. - С. 200-206.

12. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

#### **REFERENCES**

- 1. Ivanov G.S. Konstruirovanie tehnicheskih poverhnostej (matematicheskoe modelirovanie na osnove nelinejnyh preobrazovanij) [Technical surface's construction (mathematic modeling on based nonlinear transformation)]/ Moscow, Mashinostroenie Pub., 1987, 192 p.
- 2. Korotkiy V., Usmanova E., Khramova L., *Komp'juternoe modelirovanie kinematicheskih poverhnostej* [Computer simulation of Kinematic Surfaces]. 2016, v/3, i. 4, pp. 19-26.
- 3. Girn A.G. Kriterii vybora sposoba konstruirovanija obvoda. Kn.: Avtomati-zacija tehnologicheskoj podgotovki proizvodstva na baze sistem avtomatizacii prektirvanija [Criteria for choosing a path design method. Vol.: Automation of technological preparation of production based on automation systems for shutting down]. Omsk, 1980, pp. 97-101.
- 4. Osipov V.A., Leljushenko S.I., Chistjakov F.K. Analiticheskoe opisanie ajerodinamicheskih poverhnostej metodom special'nogo kontura. Kn. 3: Mashinnoe proektirovanie, uvjazka i vosproizvedenie slozhnyh detalej v aviastroenii. [Analytical description of aerodynamic surfaces using the special contour method. Vol. 3: Machine design, linking and reproduction of complex parts in aircraft construction]. Irkutsk, 1976, pp. 68-70.
- 5. Osipov V.A. SAPR i inzhenerno-geometricheskie zadachi aviacionnoj tehniki. Izv. vyssh. uchebn. zavedenij. Aviac. Tehnika [CAD and engineering and geometric problems of aviation technology. News vysh.

- educational institutions. Aviation technology]. 1980, Vol. 2, pp. 119-122.
- 6. Rejnov M.N. Matematicheskaja model' sudovoj poverhnosti [Mathematical model of the ship's surface]. L.: Sudostroenie, 1977. 32 p.
- 7. Krivoshapenko S.N., Ivanov V.N. *Entsiklopedia analiticheskih poverhnostej* [Encyclopedia of analytical surfaces]. Moscow. Librokom Publ., 2010. 560 p.
- 8. Krivoshapenko S.N. *Postroyeniye, raschet i vozmozhnost' primeneniya torsovykh obolochek v tonkostennykh konstruktsiyakh* (Construction, calculation and the possibility of using torso shells in thin-walled structures)// Raschet obolochek stroitel'nykh konstruktsiy. M.: ed. UDN, 1982. pp. 54-66
- 9. Avdot'in L.N. Matematika i elektronnovychislitel'naya tekhnika v reshenii prikladnykh gradostroitel'nykh zadach. (Mathematics and computer technology in solving applied urban planning problems.) M.: TSNTI gosgrazhdanstroya, 1966
- 10. Dergunov V.I., Zhilina N.D., Popov E.V. *Osnovy komp'yuternykh tekhnologiy v proyektirovanii* (Fundamentals of computer technology in design) N.Novgorod: Pub. NNGASU, 2003. 157 p.
- 11. Chekalin A. A., Reshetnikov M. K., Zajcev Ju. A. Modelirovanie kusochno-gladkoj poverhnosti dvumernym splajnom razlichnyh stepenej. Nauchnometodicheskie problemy graficheskoj podgotovki v tehnicheskom vuze na sovremennom jetape: materialy nauch.-metod. konf. po-svjashh. 80-letiju AGTU [Modeling a piecewise-smooth surface with a two-dimensional spline of various degrees. Scientific and methodological problems of graphic training in a technical university at the present stage: materials scientific method. conf. dedicated 80th anniversary of AGTU]. Astrahan', 15-17 sent. 2010, AGTU pp. 200-206.
- 12. Foks A., Pratt M. Vychislitel'naja geometrija. Primenenie v proektirovanii I na proizvodstve [Computing Geometry in Design and Production]. Moscow, Mir Publ. 1982, 304 p.

#### MODELING ARCHITECTURAL FORM SURFACE DEPENDENT SECTIONS

Chekalin A.A., Reshetnikov M.K., Shpilev V.V., Borodulina S.V., Ryazanov S.A.

Saratov State Technical University, Saratov, Russian Federation e-mail: reshmk@rambler.ru , chekaliny@mail.ru, vasya-shpilev@rambler.ru, despro@mail.ru

**Summary:** For the design of surfaces in architecture, as a rule, universal techniques developed for other technical industries are used. First of all, these are general kinematic surfaces and interpolation cubic splines for modeling complex piecewise smooth surfaces. The authors propose to use the fourth degree inerodifferential spline developed by them for problems of geometric modeling of architectural forms. For calculations and constructions on a computer, the proposed spline is not much more complicated than traditional cubic splines, since it has one additional parameter - a coefficient. However, this allows you to locally control the shape of a curve or surface during design, that is, to change the shape in individual areas without affecting other areas. The article proposes a method for constructing a geometric model of the kinematic surface of dependent sections with a fourth degree parabola as a generator. When using cubic splines as a guide, the surface is a  $3 \times 4$  non-uniform (heterogeneous) spline. The article shows that the surface on the basis of the proposed mathematical apparatus can be composite piecewise-smooth. A particular case of surface design is considered on the example of creating a model of the surface of the facade of a residential building according to the existing concept. The algorithm can be easily programmed and added as a tool to existing CAD systems. **Key words:** Geometric surface model, spline, parabola, surface, curve.