Раздел 3. Инженерное обеспечение

УДК 514.83

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ В КОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Неснов Д.В.

Самарский государственный технический университет
443100 ул. Молодогвардейская, 244,
soft73@mail.ru

Аннотация. В научной литературе теория поля наиболее полно освещена в цилиндрической и сферической системах координат. Это объясняется тем, что математический аппарат данных систем наиболее хорошо изучен. Когда источник поля имеет более сложную структуру, чем точка или прямая возникает необходимость в новых подходах к их изучению. Целью данного исследования является адаптация теории поля, отнесенной к криволинейным координатам, с целью ее представления в нормальных конических координатах. Кроме того, важной частью исследования является разработка аппарата геометрического моделирования поверхностей уровня скалярных и векторных полей средствами компьютерной графики. В статье показаны зависимости нормальных конических координат от прямоугольных декартовых, коэффициенты Ламе. Получены дифференциальные характеристики скалярных и векторных полей в нормальных конических координатах: лапласиан скалярного и векторного полей, дивергенция, ротор векторного поля. На приведенном примере показаны особенности применения математического аппарата геометрического моделирования поля в нормальных конических координатах. Впервые получены выражения характеристик скалярного и векторного полей в нормальных конических координатах. Разработаны методы геометрического моделирования полей с использованием средств компьютерной графики для обеспечения наглядности в их изучении.
Предмет исследования: предметом исследования являются элементы теории поля в конических координатах. В работе решаются проблемы описания скалярных и векторных полей, когда форма источника более сложная, чем точка или прямая.
Материалы и методы: основным базисом работы служат исследования общей теории поля в криволинейных координатах. Основными методами исследования являются аналитические с привлечением графических методов.
Результаты: в работе впервые описаны характеристики векторных и скалярных полей в нормальных конических координатах. Дан пример на основе которого рассмотрен математический аппарат визуализации моделируемых молей.
Выводы: полученные выражения дифференциальных характеристик скалярных и векторных полей в нормальных конических координатах примtнимы для исследования полей сложной структуры, с криволинейным источником. Показанная методика анализа внутренних уравнений скалярных полей дает возможность управлять формой поверхностей уровня.
Ключевые слова: теория поля, конические координаты, моделирование, внутренние уравнения поверхностей.

ВВЕДЕНИЕ

Множество различных процессов и явлений моделируются с применением математического аппарата теории поля. Элементы теории поля наиболее полно представлены в векторном изложении в прямоугольных декартовых координатах.

Когда источники поля имеют различные геометрические формы, то их удобно описывать с применением специальных систем координат. К примеру, если источник поля сконцентрирован в точке, его дифференциальные характеристики удобно описывать в сферических координатах. Получаемые поверхности уровня будут представлять собой сферы, с центром в источнике поля (концентрические сферы). Если источником поля является прямая, то дифференциальные характеристики будут описываться в цилиндрических координатах. При этом поверхностями уровня будут соосные цилиндры.

Теория поля с точечным и линейным источниками наиболее полно исследованы и описаны в научной литературе. Это объясняется тем, что описывающий их математический аппарат основан на использовании сферической и цилиндрической системах координат.

При описании полей сложной структуры, когда источник имеет форму отличную от точки или прямой возникают осложнения математического плана. Они требуют новых методов исследования в изучении процессов, происходящих в среде таких полей.

Одними из наиболее простых поверхностей является конус. В данной работе будут рассмотрена теория поля в конических координатах. При изучении поверхностей уровня тепловых полей с источником в виде внешних конических поверхностей выяснилось, что эти поверхности не совпадают с семьями еквидистатних конусов. Они также не являются координатными, в какой либо из общеизвестных координатных систем. Именно это является причиной, которая значительно усложняет математический аппарат описания полей и определения их характеристик.

Целью данной работы является введение новых координатных систем для определения характеристик скалярных и векторных полей. При

решении данной задачи обязательным является сохранение условия совпадения координатных семей поверхностей с поверхностями уровня поля или с предельными поверхностями процесса.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ

Работа основана на:

- положениях классической общей теории поля в криволинейных координатах [1-7];
- теории параметризации геометрических фигур и условий [8-11];
- а также современных представлениях и исследованиях теории поля [12-16].

В приведенной статье теория поля показана в нормальных конических координатах. Определителем семейства поверхностей является конус, и соответственно источником скалярных полей – коническая поверхность.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Основным методом исследования был аналитический метод. Для визуализации полей и удобства изучения был применен графический метод.

При аналитическом описании скалярных и векторных полей возникает проблема поиска средств предотвращения несовпадений поверхностей уровня с координатными поверхностями применяемой системы координации пространства.

Основной идеей работы является введение новой координации пространства для представления поля и определения его характеристик, соответствующих условию совпадения одной или двух координатных семей поверхностей с одной или двумя поверхностями уровня поля или с предельными поверхностями процесса, обеспечивает предотвращение упомянутых осложнений.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

Функции, которые вводят конические координаты:

$$\begin{aligned} x &= \left(u \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha\right)\cos t; \\ y &= \left(u \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha\right)\sin t; \\ z &= u \cdot \cos\alpha - v \cdot \sin\alpha. \end{aligned} \qquad (1)$$

На рисунке 1 показан конус-определитель.

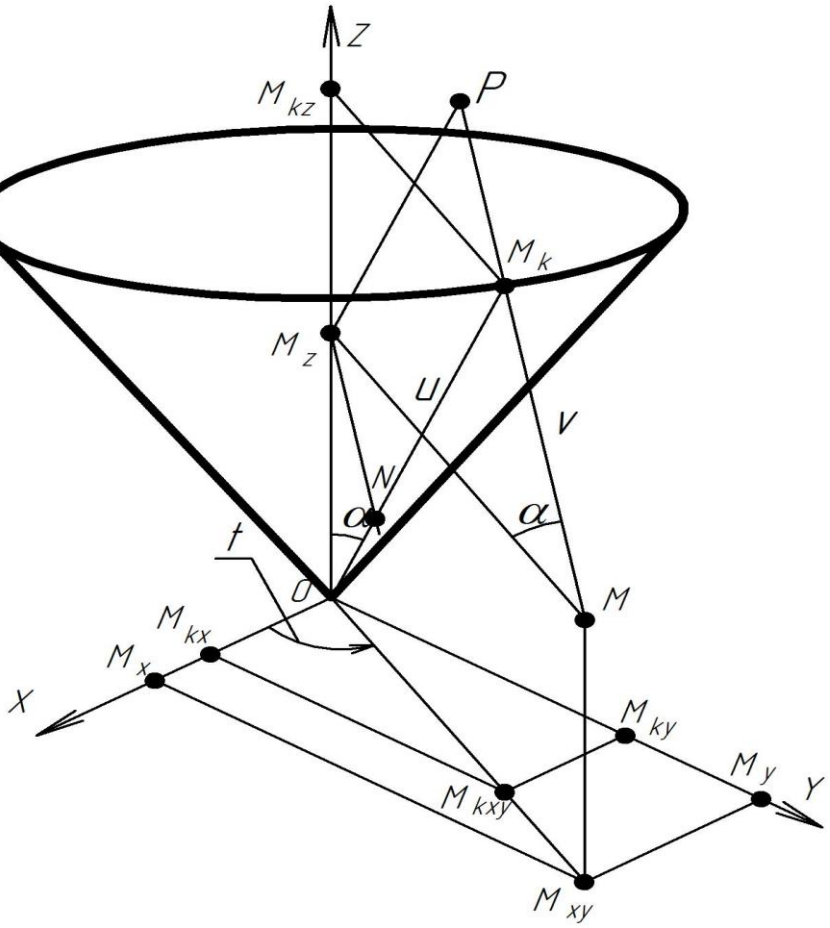


Рис. 1. Изображение конуса-определителя
Fig.1. Shows the cone-determinant.

Функции зависимости нормальных конических координат *t, u, v* от прямоугольных декартовых координат. Поскольку *t* - параметр полуплоскости, а не плоскости, для обеспечения однозначности и для предотвращения деления на ноль в компьютерных расчетах определим координату *t* на интервале $0 \le t \le 2\pi$ и добавим выше полученные выражения для *u* и *v*

$$t = \frac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0,\ y > 0;$$

$$t = \frac{3\pi}{2}, \text{ если } x = 0,\ y < 0;$$

$$t = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{ если } x > 0,\ y > 0;$$

$$t = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, \text{ если } x < 0;$$

$$t = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi, \text{ если } x > 0,\ y < 0;$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\alpha + z\cdot\cos\alpha;$$

$$v = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\alpha - z\cdot\sin\alpha.$$

(2)

Условие возможности однозначного разрешения уравнений (1) относительно *t, u, v* и уравнений (2) относительно *x, y, z*

$$\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = u\sin\alpha + v\sin\alpha \neq 0$$

(3)

где частные производные используют для функций (1):

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\left(u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha\right)\sin t,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin\alpha\cdot\cos t,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \cos\alpha\cdot\cos t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha\right)\cos t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin\alpha\cdot\sin t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \cos\alpha\cdot\sin t,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos\alpha,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\sin\alpha.$$

(4)

Те точки, в которых выражение якобиана (3) равно нулю,

$$u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha = 0 \quad (5)$$

составляют область пространства, координация которой нормальными коническими координатами невозможна. Определим *v* из (5)

$$v = -\,u\,\operatorname{tg}\alpha. \quad (6)$$

Уравнению (6) соответствует ось конуса, которая совпадает с осью *0z*.

Определению области существования введенной системы нормальных конических координат (область правильной координации пространства нормальными коническими координатами) будет посвящена другая статья.

Дифференциально-геометрические характеристики полей в нормальных конических координатах

Найдем выражения частных производных функций

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\left(u\sin\alpha + v\cos\alpha\right)\sin\left[t + \frac{(1-\operatorname{sign}(\mathrm{u}\operatorname{tg}\alpha + \mathrm{v}))\pi}{2}\right];$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(u\sin\alpha + v\cos\alpha\right)\cos\left[t + \frac{(1-\operatorname{sign}(\mathrm{u}\operatorname{tg}\alpha + \mathrm{v}))\pi}{2}\right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin\alpha\,\cos\left[t + \frac{(1-\operatorname{sign}(\mathrm{u}\operatorname{tg}\alpha + \mathrm{v}))\pi}{2}\right];$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin\alpha\sin\left[t + \frac{(1-\operatorname{sign}(\mathrm{u}\operatorname{tg}\alpha + \mathrm{v}))\pi}{2}\right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos\alpha;$$

(7)

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \cos\alpha\cos\left[t + \frac{(1-\operatorname{sign}(\mathrm{u}\operatorname{tg}\alpha + \mathrm{v}))\pi}{2}\right];$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \cos\alpha\sin\left[t + \frac{(1-\operatorname{sign}(\mathrm{u}\operatorname{tg}\alpha + \mathrm{v}))\pi}{2}\right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\sin\alpha.$$

Коэффициенты Ламе для нормальных конических координат определяем по формулам (7):

$$H_t = u\sin\alpha + v\cos\alpha,\ H_u = 1,\ H_v = 1. \quad (8)$$

Элементарные перемещения:

- при изменении только t $dS_t = (u\sin\alpha + v\cos\alpha)dt$;
- при изменении только u $dS_u = du$; (9)
- при изменении только v $dS_v = dv$.

Дифференциал дуги

$$dS^2 = (u\sin\alpha + v\cos\alpha)^2 dt^2 + du^2 + dv^2. \quad (10)$$

Дифференциал объема

$$d\tau = (u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha)dtdudv. \quad (11)$$

Расчеты показали, что система нормальных конических координат относится к триортогональным системам. Так как коэффициенты H_t, H_u, H_v удовлетворяют шести дифференциальным уравнениям второго порядка в частных производных, все слагаемые которых нулевые. То есть, в такой системе каждая пара координатных поверхностей пересекается между собой по линиям кривизны.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{H_t}\frac{\partial H_u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_u}\frac{\partial H_t}{\partial u}\right) + \frac{1}{H_v^2}\frac{\partial H_t}{\partial v}\frac{\partial H_u}{\partial v} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_u}\frac{\partial H_v}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_v}\frac{\partial H_u}{\partial v}\right) + \frac{1}{H_t^2}\frac{\partial H_u}{\partial t}\frac{\partial H_v}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_v}\frac{\partial H_t}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{H_t}\frac{\partial H_v}{\partial t}\right) + \frac{1}{H_u^2}\frac{\partial H_v}{\partial u}\frac{\partial H_t}{\partial u} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 H_t}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{H_u}\frac{\partial H_u}{\partial v}\frac{\partial H_t}{\partial u} - \frac{1}{H_v}\frac{\partial H_v}{\partial u}\frac{\partial H_t}{\partial v} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 H_u}{\partial v\,\partial t} - \frac{1}{H_v}\frac{\partial H_v}{\partial t}\frac{\partial H_u}{\partial v} - \frac{1}{H_t}\frac{\partial H_t}{\partial v}\frac{\partial H_u}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 H_v}{\partial t\,\partial u} - \frac{1}{H_t}\frac{\partial H_t}{\partial u}\frac{\partial H_v}{\partial t} - \frac{1}{H_u}\frac{\partial H_u}{\partial t}\frac{\partial H_v}{\partial u} = 0\cdot$$

Вектор-градиент скалярного поля в точке t, u, v, отнесенный к подвижному локальному реперу

$$G = \mathrm{grad}F = \frac{1}{(u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha)}\frac{\partial F}{\partial t}e_t + \frac{\partial F}{\partial u}e_u + \frac{\partial F}{\partial v}e_v \quad (12)$$

Производная скалярного поля по направлению $\overline{l_0}$

$$\bar{l}_0 = \cos\bar{\alpha}e_t + \cos\bar{\beta}e_u + \cos\bar{\gamma}e_v, \quad (13)$$

где - $\cos\overline{\alpha}$, $\cos\overline{\beta}$, $\cos\bar{\gamma}$ направляющие конусы орта $\overline{l_0}$ относительно репера e_t, e_u, e_v

$$\frac{dF}{dl} = \frac{G_t}{|\overline{G}|}\cos\bar{\alpha} + \frac{G_u}{|\overline{G}|}\cos\bar{\beta} + \frac{G_v}{|\overline{G}|}\cos\bar{\gamma}\cdot \quad (14)$$

где

$$G_t = \frac{1}{u\sin\alpha + v\cos\alpha}\frac{\partial F}{\partial t},\quad G_u = \frac{\partial F}{\partial u},$$

$$G_v = \frac{\partial F}{\partial v},\quad |\overline{G}| = \sqrt{G_t^2 + G_u^2 + G_v^2}.$$

Лапласиан скалярного поля с учетом выражений H_t, H_u, H_v (2.15)

$$\Delta F = \frac{1}{u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\frac{1}{u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha) + \frac{\partial F}{\partial u}\sin\alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\cos\alpha\right]. \quad (15)$$

Поток вектора $\bar{a}$ через поверхность S определяется по формуле:

$$N = \iint_S \left[a_t(t,u,v)\cos(\bar{n}_t\hat{}\,e_t) + a_u(t,u,v)\cos(\bar{n}_u\hat{}\,e_u) + a_v(t,u,v)\cos(\bar{n}_v\hat{}\,e_v)\right]dS \quad (16)$$

где $\bar{n}$ - вектор нормали к элементарной площади dS.

Конкретизировать формулу возможно лишь после представления поля и поверхности.

Дивергенция (расхождение) векторного поля вычисляется с учетом выражений коэффициентов Ламе (8)

$$\operatorname{div}\bar{a}=\frac{1}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\left[\frac{\partial a_t}{\partial t}+(u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha)\frac{\partial a_u}{\partial u}+a_u\sin\alpha+\right.$$
$$\left.+(u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha)\frac{\partial a_v}{\partial v}+a_v\cos\alpha\right].$$

После упрощений получаем

$$\operatorname{div}\bar{a}=\frac{\frac{\partial a_t}{\partial t}+a_u\sin\alpha+a_v\cos\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}+\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{\partial a_v}{\partial v}. \quad (17)$$

Как видим дивергенция векторного поля это скаляр.
Лапласиан векторного поля

$$\Delta\bar{a}=\left[\frac{1}{(u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha)^2}\frac{\partial^2 a_t}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 a_t}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 a_t}{\partial v^2}+\frac{\sin\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\frac{\partial a_t}{\partial u}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\frac{\partial a_t}{\partial v}\right]e_t+\left[\frac{1}{(u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha)^2}\frac{\partial^2 a_u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 a_u}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 a_u}{\partial v^2}+\right. \quad (18)$$
$$\left.+\frac{\sin\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{\cos\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\frac{\partial a_u}{\partial v}\right]e_u+$$
$$+\left[\frac{1}{(u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha)^2}\frac{\partial^2 a_v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 a_v}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 a_v}{\partial v^2}+\frac{\sin\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\frac{\partial a_v}{\partial u}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\frac{\partial a_v}{\partial v}\right]e_v.$$

Ротор (вихрь) векторного поля определяется с учетом выражений H_t, H_u, H_v (8)

$$W_t=\frac{\partial a_v}{\partial u}-\frac{\partial a_u}{\partial v};$$
$$W_u=\frac{\partial a_t}{\partial v}+\frac{\cos\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}a_v-\frac{1}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\frac{\partial a_v}{\partial t};$$
$$W_v=\frac{1}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\frac{\partial a_u}{\partial t}-\frac{\partial a_t}{\partial u}-\frac{\sin\alpha}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}a_t.$$

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\left(\frac{\partial a_v}{\partial u}-\frac{\partial a_u}{\partial v}\right)e_t+\left[\frac{\partial a_t}{\partial v}+\frac{1}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\left(a_v\cos\alpha-\frac{\partial a_v}{\partial t}\right)\right]e_u+$$
$$+\left[\frac{1}{u\cdot\sin\alpha+v\cdot\cos\alpha}\left(\frac{\partial a_u}{\partial t}-a_t\sin\alpha\right)-\frac{\partial a_t}{\partial u}\right]e_v. \quad (19)$$

Приведенные выражения дифференциально-геометрических характеристик скалярного и векторного полей, представленных в нормальных конических координатах, позволяют составлять геометрическую модель поля и привлекать к ее изучению наглядные средства компьютерной графики.

Покажем на конкретном примере особенности применения приведенного математического аппарата геометрического моделирования поля в нормальных конических координатах.

Пример. Вычислить производную скалярного поля

$$F=-0{,}25\sin u\cos 6t-v \quad (20)$$

по направлению

$$\bar{l}^0=3e_t+4{,}8e_u-2e_v \quad (21)$$

в точке M (t =0,4, u =10 v = -5). Параметр конуса-определителя системы α = 0.52.

Показать поверхности уровня скалярного поля (20)

$$v=-0{,}25\sin u\cos 6t+i\Delta C \quad (22)$$

при i = 0, 1, 2, ΔC = 0,4, $0\le t\le 2\pi$, $0{,}5\le u\le 1{,}57$.

Решение. Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{l}_0$ в базисе e_t, e_u, e_v

$$\cos\bar{\alpha} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4{,}8^2 + 2^2}} = 0{,}5;$$

$$\cos\bar{\beta} = \frac{4{,}8}{\sqrt{3^2 + 4{,}8^2 + 2^2}} = 0{,}8;$$

$$\cos\bar{\gamma} = -\frac{2}{\sqrt{3^2 + 4{,}8^2 + 2^2}} = -0{,}3317.$$

Найдем координаты Gt, Gu, Gv вектора градиента скалярного поля (20) по формулам (12)

$$G_t = -\frac{1}{u\sin\alpha + v\cos\alpha} 6(-0{,}25)\sin u \sin 6t,$$

$$G_u = -0{,}25\cos u\cos 6t,\ G_v = -1.$$

Подставим значения координат точки M и параметра α конуса-определителя. Получим

$$G_t = \frac{-6(-0{,}25)\sin(10)\sin(6\cdot 0{,}4)}{10\sin(0{,}52) - 5\cos(0{,}52)} = -0{,}8763;$$

$$G_u = (-0{,}25)\cos(10)\cos(6\cdot 0{,}4) = -0{,}1546;$$

$$G_v = -1.$$

Модуль вектора градиента

$$G = \sqrt{(-0{,}8763)^2 + (-0{,}1546)^2 + 1^2} = .$$

$$= \sqrt{0{,}7679 + 0{,}0239 + 1} = 1{,}3386$$

Вычисляем значение производной скалярного поля (20) по направлению (21) в точке M, воспользовавшись формулой (14) и значением направляющих косинусов

$$\frac{dF}{dl} = -\frac{0{,}8763}{1{,}3386}\cdot 0{,}5 - \frac{0{,}1546}{1{,}3386}\cdot 0{,}8 -$$

$$-\frac{1}{1.3386}(-0.3317) = -0.1653$$

Поверхности уровня строим по внутренним уравнениям (22).

На рисунке 2 показаны три поверхности уровня вместе, на рисунках 3, 4 и 5 эти поверхности показано отдельно.

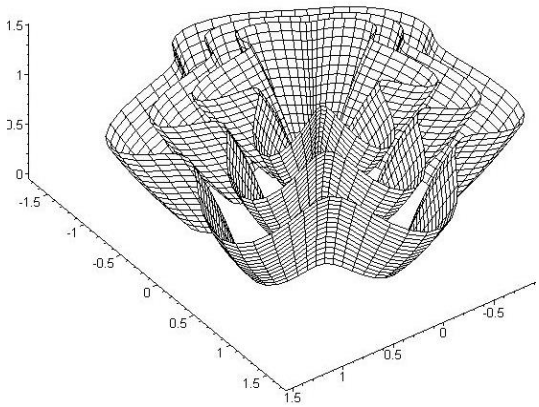


Рис. 2. Поверхности уровня $v = h\cdot\sin u\cdot\cos(n\cdot t) + i\Delta C$ скалярного поля $F = h\cdot\sin u\cdot\cos(n\cdot t) - v$ с параметрами ΔC=0,4; i=0, 1, 2; α=0,52; h=-0.25; n=6; u=0,5…1,57; t=0…2π

Fig. 2. Surfaces of the level $v = h\cdot\sin u\cdot\cos(n\cdot t) + i\Delta C$ of a scalar field $F = h\cdot\sin u\cdot\cos(n\cdot t) - v$ with parameters ΔC=0,4; i=0, 1, 2; α=0,52; h=-0.25; n=6; u=0,5…1,57; t=0…2π

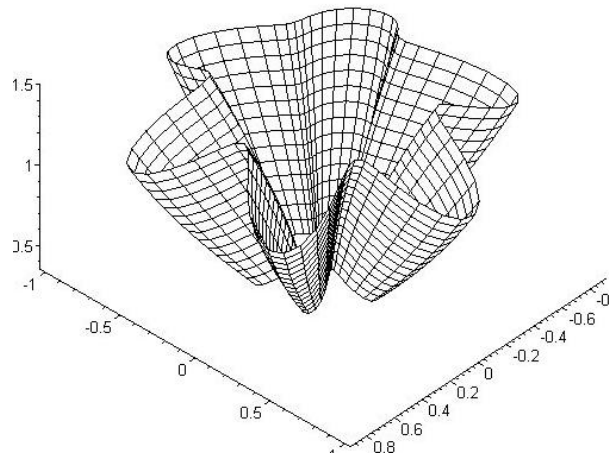


Рис. 3. Поверхности уровня i=0
Fig. 3. Surfaces of the level i=0

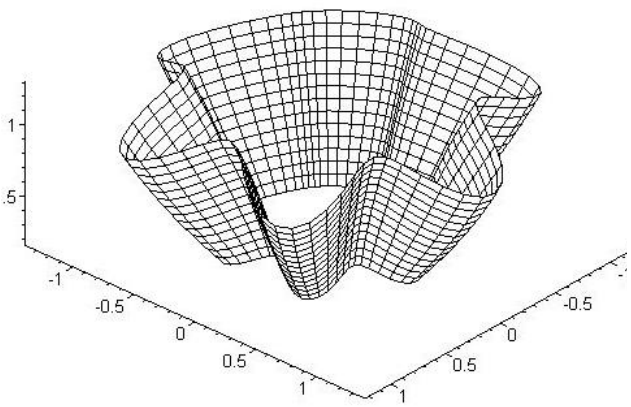


Рис. 4. Поверхности уровня i=1
Fig. 4. Surfaces of the level i=1

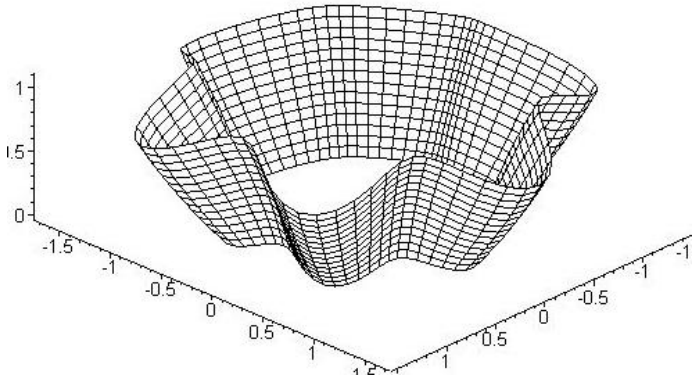


Рис. 5. Поверхности уровня *i*=2
Fig. 5. Surfaces of the level *i*=2

ВЫВОДЫ

1. Полученные средства описания полей в нормальных конических координатах позволяют визуализировать средствами компьютерной графики поверхности уровня сложной структуры.

2. В примере показано практическое применение полученных результатов в целях описания поверхностей уровня скалярных полей.

3. Результаты полученных теоретических исследований можно применить для решения различных задач:

- получение параметров скалярных полей в известной точке пространства при заданных параметрах конуса-определителя и последующей визуализацией поверхностей уровня;
- вычисление параметров векторного поля (дивергенция, лапласиан, ротор) в нормальных конических координатах;
- визуализация поверхностей уровня полей в нормальных конических координатах при различных значениях параметра конуса-определителя α.

Использование специальных координат для описания полей сложной структуры значительно упрощает вычисление характеристик поля. Дальнейшим развитием данной тематики является изучение области существования введенной системы нормальных конических координат, которую еще можно называть областью правильной координации нормальными коническими координатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альпин Л.М. Теория поля. – М.: Недра, 1966. – 348 с.

2. Булах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теории поля. – Киев: Наукова думка, 1998. – 300 с.

3. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. – Москва: Физматиздат, 1962. – 132 с.

4. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. – М.: Наука, 1968. – 128 с.

5, Дубнов Я.С. Основы векторного исчисления. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – Ч. 1. – 368 с., 1952. – Ч. 2. – 416 с.

6. Мінаєв О.А., Ілюкович Б.М., Ізмайлова М.К. Механіка суцільних середовищ. – К.: Вища школа, 1995. – 272 с.

7. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Издательство АН СССР, 1961. – 430 с.

8. Джапаридзе И.С. О погружении геометрических соответствий в модели многомерных пространств // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Киев: «Будівельник». – 1968. – Вып.6. – С.13-17.

9. Котов И.И., Николаевский Г.К., Рыжов Н.Н., Халдеев И.М. Прикладная геометрия поверхностей // Сб. работ конференции «Вопросы начертательной геометрии и ее приложения». – Харьков: ХАДИ. – 1963. – Вып.3. – С. 15-19.

10. Pidgorny O.L. From the Theory of the Maps to Geometrical Modeling of Objects, Phenomena and Processes // The Applied Geometry and Engineering Graphics – Kiev. – 2002. – Issue №70. – Pp. 32-38.

11. Рыжов Н.Н. Общие вопросы задания и параметризации поверхностей // Тезисы докладов Второй всесоюзной геометрической конференции. – Харьков. – 1964. – С. 22-24.

12. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, The classical theory of fields (Elsevier, New York, 2013)

13. P. Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, Conformal field theory (Springer-Verlag, New York, 2012).

14. J. Quartieri, L. Sirignano, C. Guarnaccia, WSEAS Int. conf. (EMESEG'08), Heraklion, Greece (2008).

15. A. A. Tsinaeva, M. N. Nikitin, Procedia Eng. 150, 2340-2344 (2016), DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.321.

16. M. N. Nikitin, J. of Physics: Conf. series 891, 12039 (2017), DOI: 10.1088/1742- 6596/891/1/012039.

REFERENCES

1. Alpin L.M. Field theory. – M.: Nedra, 1966. – 348 p. (In Russian).
2. Bulakh E.G., Schuman V.N. Fundamentals of vector analysis and field theory. – Kiev: Naukova Dumka, 1998. – 300 p. (In Russian).
3. Goldfayn I.A. Vector analysis and field theory. - Moscow: Fizmatizdat, 1962. – 132 p. (In Russian).
4. Goldfayn I.A. Vector analysis and field theory. – M.: Nauka, 1968. - 128 p. (In Russian).
5, Dubnov Ya.S. Fundamentals of vector calculus. – M.-L.: GITTL, 1950. – Part 1. – 368 p., 1952. – Part 2. – 416 p. (In Russian).
6. Mineva O.A., Ilyukovich B.M., Ismaylova M.K. The mechanism of social means. - K.: Vishka school, 1995. – 272 p. (In Russian).
7. Kochin N.E. Vector calculus and the beginnings of tensor calculus. – M.: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1961. – 430 p. (In Russian).
8. Japaridze I.S. On the immersion of geometric correspondences in the model of multidimensional spaces // Applied Geometry and Engineering Graphics. – Kiev: Budivelnik. – 1968. – Issue 6. – Pp.13-17. (In Russian).
9. Kotov I.I., Nikolaevsky G.K., Ryzhov N.N., Khaldeev I.M. Applied geometry of surfaces // Sat. Conference "Descriptive geometry and its applications". – Kharkov: HADI. – 1963 – Issue 3. – Pp. 15-19. (In Russian).
10. Pidgorny O.L. From the Theory of the Maps to Geometrical Modeling of Objects, Phenomena and Processes // The Applied Geometry and Engineering Graphics – Kiev. – 2002. – Issue №70. – Pp. 32-38. (In Ukraine).
11. Ryzhov N.N. General questions of assignment and parameterization of surfaces // Abstracts of the Second All-Union Geometric Conference. – Kharkov. – 1964. – Pp. 22-24. (In Russian).
12. L.D. Landau, E. M. Lifshitz, The classical theory of fields (Elsevier, New York, 2013).
13. P. Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, Conformal field theory (Springer-Verlag, New York, 2012).
14. J. Quartieri, L. Sirignano, C. Guarnaccia, WSEAS Int. conf. (EMESEG'08), Heraklion, Greece (2008).
15. A.A. Tsinaeva, M. N. Nikitin, Procedia Eng. 150, 2340-2344 (2016), DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.321
16. M.N. Nikitin, J. of Physics: Conf. series 891, 12039 (2017), DOI: 10.1088/1742- 6596/891/1/012039

ELEMENTS OF FIELD THEORY IN CONIC COORDINATES

Nesnov D.V.

Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya st., Samara, Russia

Abstract: In the scientific literature, field theory is most fully covered in cylindrical and spherical coordinate systems. This is explained by the fact that the mathematical apparatus of these systems is the most well studied. When the field source has a more complex structure than a point or a straight line, there is a need for new approaches to their study. The purpose of this study is to adapt the field theory referred to curvilinear coordinates in order to represent it in normal conic coordinates. In addition, an important part of the study is the development of an apparatus for geometric modeling of level surfaces of scalar and vector fields by means of computer graphics. The article shows the dependences of normal conic coordinates on rectangular Cartesian coordinates, Lame coefficients. Differential characteristics of scalar and vector fields in normal conic coordinates are obtained: Laplacian of scalar and vector fields, divergence, vector field curl. The given example shows the features of the application of the mathematical apparatus of geometric modeling of the field in normal conic coordinates. For the first time, expressions for the characteristics of scalar and vector fields in normal conic coordinates are obtained. Methods for geometric modeling of fields using computer graphics tools have been developed to provide clarity in their study.

Subject: The subject of research is the elements of field theory in conic coordinates. The paper solves the problem of describing scalar and vector fields, when the shape of the source is more complex than a point or a straight line.

Materials and methods: The main basis of the work is the study of the general field theory in curvilinear coordinates. The main research methods are analytical with the involvement of graphical methods.

Results: The paper describes for the first time the characteristics of vector and scalar fields in normal conic coordinates. An example is given on the basis of which the mathematical apparatus for visualizing the simulated moles is considered.

Conclusions: The resulting expressions for the differential characteristics of scalar and vector fields in normal conical coordinates are suitable for studying fields of a complex structure, with a curvilinear source. The shown technique for analyzing the internal equations of scalar fields makes it possible to control the shape of the level surfaces.

Key words: Field theory, conic coordinates, modeling, internal equations of surfaces.